

〔特集〕 注目研究 in 年会 2014

# 剪断流における遷移と渦の対称性について

## Laminar-Turbulent Transition and Symmetry of Vortices in Shear Flows

\*関西大学システム理工学部  
Faculty of Engineering and Applied Science, Aston University  
Faculty of Engineering and Applied Science, Aston University  
関西大学システム理工学部  
関西大学システム理工学部  
関西大学システム理工学部

板野 智昭†  
秋永 剛  
S.C.Generalis  
紺野 敬人  
二宮 隆弘  
関 眞佐子

平面クエット流れにおける不安定平衡解は、相空間における層流乱流境界上に存在することがあり、高レイノルズ数において層流乱流遷移における指標となる。本研究では、主流に対してスパン方向に鏡像対称性を有した対称性の高い平衡解が、他の平衡解に比べ相空間において層流状態に近い位置に存在することを示し、層流乱流遷移の指標として有意であることを、高レイノルズ数における解の漸近的挙動から導く。

(KEY WORDS): laminar-turbulent transition, symmetry of vortices, shear flow

### 1 平面クエット流の特異解

近年、平行クエット流における特異解の発見が相次いでいる。計算機能力向上に支えられ続いた解の発見のブームは、平板クエット流で永田や Busse らのグループによる、平面クエット流における非自明な非線形不安定常解 (以下では、この解を、発見者ら, Nagata<sup>1)</sup>, Clever & Busse<sup>2)</sup>, Waleffe<sup>3)</sup> の名を冠して NBW と略す) の発見を端緒とする。流れの乱流状態とそれら厳密解の関係は、長い間、多くの研究者が最も関心を寄せてきたが、著者らが知る限り、少数の先駆的研究<sup>4)</sup>を除き、まだ不明な点が多い。ここでは、正面切ってこれらの解と乱流の関係そのものを議論するのは控え、以下の推論の根拠をなす仮定に色々と抜け穴があることも恐れず、数少ない状況証拠から想像力豊かにこの関係を見直してみたい。

### 2 吸引域境界上にある HVS

ある瞬間の流れの状態を高次元空間 (状態空間) における一点とみなすと、流れの時間発展は支配方程式から決定論的に定まる状態空間中の軌道と考えることがで

きる。ここでは、この状態空間における固定点 (不動点)、あるいは極限周期軌道の特異解と呼ぶ。平面クエット流において、自明な層流解も状態空間の中での一固定点とみることができるが、層流解が有限の  $Re$  では線形攪乱に対して安定である一方、層流解以外の非自明な解は線形安定性に関してどれも不安定である。ただし、また、平面クエット流において、十分レイノルズ数が高い場合、時間変動を伴う乱流状態が非常に長い時間継続しようという経験的事実も考え合わせると、層流と並び乱流状態も系のアトラクターと考えるのが自然である。この時、この状態空間内の大部分の点は、(1) その点から始まって十分時間が経過すると、系の全領域で流れの状態は層流状態に漸近的に近づく、もしくは、(2) その点から始まって十分時間が経過すると、系の全領域 (もしくは一部の領域) で流れの状態が時間変動しつづけ、いわゆる乱流状態に特徴的な混合や渦の生成・消滅を繰り返す、のいずれかに分類されるだろう。状態空間の中にアトラクターが複数存在するならば、必然的に、それら吸引域の境界がなくてはならない。これを吸引域境界 (Basin Boundary, BB) と呼ぶ。

ミニマル流のように自由度が比較的少ない系 (このような場合、空間間欠的に乱れた状態が現れるような状

\*〒 564-8680 吹田市山手町 3-3-35

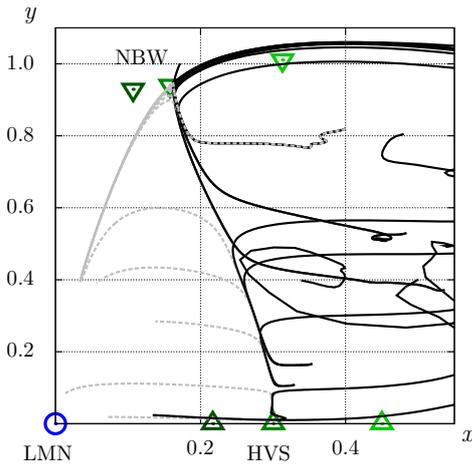


図1 二つの実数  $\epsilon, \delta$  によって決まる初期条件  $\mathbf{u}(\epsilon, \delta)$  から始まるミニマル平面クエット流の軌道の  $x-y$  面への射影成分. 図から, 軌道は2つのグループに分けることができ, 一部は乱流域  $x \gg 0.5$ , 残りは層流  $\mathbf{u}_{LMN}$  に向かう傾向があることが分かる. これらのグループの間には分水嶺が存在していて, その分水嶺はちょうど  $\mathbf{u}_{NBW}$  を通っており, 分水嶺上の軌道は比較的長い時間の間, 層流にも乱流域にも到達しない. 一方, レイノルズ数の増加に伴い, 二つの平衡解  $\mathbf{u}_{HVS}, \mathbf{u}_{NBW}$  の位置は, 層流に近づく傾向を示す (図には各平衡解に  $Re$  の違いによって異なる色で表示している) が,  $\mathbf{u}_{NBW}$  と層流の距離はある値以下には近づかないため層流に漸近するとは言えない<sup>6)</sup>. なお,  $x-y$  面上への射影を計算するのに際し, 任意の状態  $\mathbf{u}$  と三つの平衡点  $\mathbf{u}_{LMN}, \mathbf{u}_{HVS}, \mathbf{u}_{NBW}$  との距離 (流れ場の差の二乗ノルムの平方根) を計算し, それらの距離を維持するように状態  $\mathbf{u}$  を三次元空間における  $(x, y, z)$  座標を計算している. 三つの平衡点は  $x-y$  面上にあるものとし,  $\mathbf{u}_{LMN}$  を原点  $O$ , 対称性の高い  $\mathbf{u}_{HVS}$  を  $x$  軸上, ノルム  $|\mathbf{u}_{NBW} - \mathbf{u}_{LMN}|$  と  $|\mathbf{u}_{NBW} - \mathbf{u}_{HVS}|$  が  $x-y-z$  空間の距離に相当するように  $\mathbf{u}_{NBW}$  を  $x-y$  面上にとった.

態を考慮せずとも済む) においては, ある流れの状態が BB 上にあるか否かを判断するための安直な方法がある. つまり, その状態からしばらく時間をおいて時間発展させても, 流れが定常な層流 (以下では Laminar, LMN と略する) にも, 乱流状態にも引き込まれなければ, その状態は BB 上にあったことになる. ただし BB の次元は相空間全体からみて測度が 0 のサブスペースであると考えられるので, BB 上の候補の点を全て数え挙げることは難しい. 我々は, Gibson らのグループと独立に先年発見した厳密解 (渦線を引くと解が満たす鏡像対称性からあたかもヘアピン状の渦構造が想像されるので, Hairpin Vortex State, HVS と呼んでいる) が, BB 上にあることを近年明らかにした<sup>5)</sup>. HVS に攪乱を加え時間発展を

追うと, 加える攪乱が小さいほど, 系のエネルギーは長時間一定値 (流れの状態は HVS のまま) に止まることが示された. 初期に加える攪乱の符号によって, しばらく後の系のエネルギーは, (1) 層流もしくは (2) 乱流状態, のいずれかに分離する. 同じことが NBW についても成り立つことが, Wang ら<sup>6)</sup> によって検証されている.

### 3 $Re \rightarrow \infty$ における HVS の漸近挙動

Wang ら<sup>6)</sup> によると, NBW の下分枝は  $Re$  の増加とともに, ストリーク成分 (流れ方向の速度場の  $y, z$  依存性を持つ成分. ここで  $y$  は壁に垂直方向,  $z$  はスパン方向とした) の振幅を  $Re$  に依存しない程度の大きさ  $O(1)$  で残しつつ, ストリークを生成する  $y, z$  方向の成分 (縦渦成分, 断面流) や  $x$  に依存する項など残りの項の振幅は, リーディングオーダーを  $O(Re^{-1})$  程度として減衰する. ここで注目したいことは, 彼らが, “the lower branch state do not bifurcate from the laminar flow, not even at  $R = \infty$ ” と指摘しているように, NBW が  $Re \rightarrow \infty$  までもっていても層流からは分岐していない点である. 彼らは古典的に議論されてきた剪断流の臨界層にヒントを得て, 流れ方向の波数を固定した時の  $u(y, z) = 0$  で定義される臨界層の厚みを  $O(Re^{-\frac{1}{3}})$  とおいた場合,  $y, z$  方向成分の 1 次のモードが  $O(Re^{-1})$  程度と見積もられるとしているが, 流れ方向の波数依存性まで考慮した詳細な解析が, 最近 Hall らのグループによってなされている<sup>7,8)</sup>.

我々は, Wang らと同様にしてニュートン法を用いた計算により, HVS の高  $Re$  における漸近挙動を調べた<sup>5)</sup>. NBW では, 流れ方向のみに依存する成分 (彼らはストリーク成分と呼んでいる) 以外の成分は,  $Re$  の増加とともに個々の成分に特徴的な幂で 0 に漸近する傾向にある. 一方, HVS について同様の計算を行うと, ストリーク成分を含むあらゆる成分が NBW の場合よりも速く減衰し, 相空間の中で HVS は層流状態に漸近する傾向がある (もしくは, 接続とまではいかずとも, 場の運動エネルギーの評価から層流状態が NBW よりは HVS に近い位置に存在する) ことが, ニュートン法による数値的な解の追跡 ( $Re \leq 10^4$ ) から分かった. これは, 数値計算にもとづく予測であるため,  $Re \rightarrow \infty$  における極限での HVS の挙動を厳密に断定することはできないが, もしこのことがレイノルズ数が無限大の極限でも正しいとすると, 有限の  $Re$  に対して安定であると考えられている平面クエット流の層流が,  $Re \rightarrow \infty$  で, HVS と “接続” していることを示唆する. そこで, 平面クエット流れがすべての  $Re$  に対して安定であるとする根拠について振り返ってみよう. 平面クエット流に対する Orr-Sommerfeld 方程式の固有値の成長率は,  $Re$  の大

小に関わらず  $-\alpha/\sqrt{3}$  ( $\alpha$  は流れ方向の波数) 以下になる<sup>9,10</sup>). 我々の計算では, HVS は定常解として計算しているので, HVS が  $Re \rightarrow \infty$  において Orr-Sommerfeld 方程式の固有モード (位相速度に対応する固有値の実成分は 0) に接続していると考えるのが自然であるが, これは  $Re \rightarrow \infty$  で HVS が層流に接続するとした数値的な予測とは相入れない. この矛盾ともとれる点は, 今後の研究により解消されるべき課題である.

#### 4 LMN, HVS, NBW のなす平面上の相図

層流解を  $\mathbf{u}_{LMN}$ , HVS を  $\mathbf{u}_{HVS}$ , NBW を  $\mathbf{u}_{NBW}$  としよう. 相空間内で, これら 3 つの特異解をとる平面上の点  $\mathbf{u}(\epsilon, \delta)$  を次のように定義する.  $\mathbf{u}(\epsilon, \delta) = (1 - \epsilon)\mathbf{u}_{LMN} + \epsilon((1 - \delta)\mathbf{u}_{HVS} + \delta\mathbf{u}_{NBW})$ . ここで,  $\mathbf{u}(\epsilon, \delta)$  は, 二つの実数パラメタ ( $\epsilon, \delta$ ) の値の如何によらず非圧縮条件を満たした流れ場ではあるが, 必ずしも定常解ではない点に注意しよう. ( $\epsilon, \delta$ ) の値をいろいろと変化させながら,  $\mathbf{u}(\epsilon, \delta)$  を初期条件として, その時間発展を適当な空間に射影すると, Fig.1 のような相図が得られる. 図から, 軌道は 2 つのグループに分けることができ, 一部 (黒の実線) は乱流域  $x \gg 0.5$ , 残り (灰色の点線) は層流  $\mathbf{u}_{LMN}$  に向かう傾向があることが分かる. これら二つのグループの間には分水嶺が存在していて, その分水嶺はちょうど  $\mathbf{u}_{HVS}$  と  $\mathbf{u}_{NBW}$  を通っており, (図を見ただけでは分からないが) 分水嶺上の軌道は比較的長い時間の間, 層流にも乱流域にも到達しない.  $\mathbf{u}_{HVS}$  から  $\mathbf{u}_{NBW}$  に向かって伸びる分水嶺が BB に相当する. つまり, 二つの平衡解は同じ B.B. 上に存在している. 一方, レイノルズ数の増加に伴い, 二つの平衡解  $\mathbf{u}_{HVS}, \mathbf{u}_{NBW}$  は, 層流に近づく傾向を示すが,  $\mathbf{u}_{NBW}$  と層流の距離はある限界値以下にはならないため, NBW が  $Re \rightarrow \infty$  で HVS と同等ほどには層流に漸近するとは言えない. なお, ここで行われた流れ場の三次元空間における点  $(x, y, z)$  への射影の計算に際しては, まず, 任意の流れ場  $\mathbf{u}$  の三平衡解  $\mathbf{u}_{LMN}, \mathbf{u}_{HVS}, \mathbf{u}_{NBW}$  からの距離 (二つの場の差の自乗ノルムの平方根  $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|$ ) を計算し, 次にこれら三つの距離が, 三次元空間において三平衡解の座標からの距離と一致するように状態  $\mathbf{u}$  に相当する三次元空間  $(x, y, z)$  (ただし  $z > 0$ ) にプロットした. 三平衡解に相当する座標はいずれも  $x - y$  面上にあるものとし,  $\mathbf{u}_{LMN}$  を原点 O, 対称性の高い  $\mathbf{u}_{HVS}$  を  $x$  軸上 ( $x > 0$ ) に距離  $|\mathbf{u}_{HVS} - \mathbf{u}_{LMN}|$  を維持するようにプロットし, 更に距離  $|\mathbf{u}_{NBW} - \mathbf{u}_{LMN}|$  と  $|\mathbf{u}_{NBW} - \mathbf{u}_{HVS}|$  が三次元空間内の距離に相当するように  $\mathbf{u}_{NBW}$  に相当する座標を  $x - y$  面上 ( $x > 0, y > 0$ ) にとった.

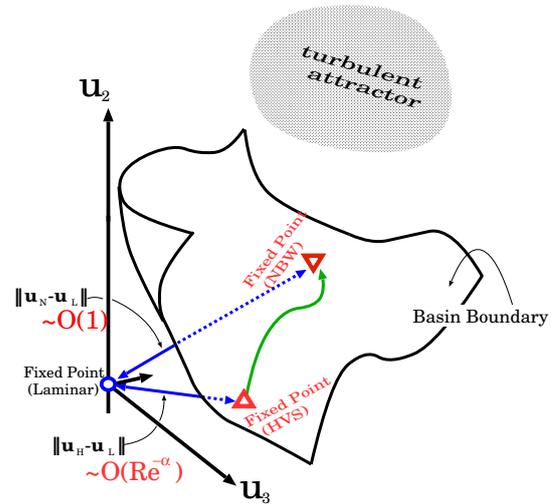


図2 相空間における三つの特異点  $\mathbf{u}_{LMN}$ ,  $\mathbf{u}_{HVS}$ ,  $\mathbf{u}_{NBW}$  の位置.  $Re$  の増加とともに, ゆっくりとだが  $\mathbf{u}_{HVS}$  は層流に漸近する.  $\mathbf{u}_{HVS}, \mathbf{u}_{NBW}$  は一つの B.B. を形作っているため, 高レイノルズ数における層流からの遷移を考える時,  $\mathbf{u}_{HVS}$  は遷移の指標として重要であり, 遷移の初期にスパン方向に鏡像対称な渦が発生しやすいことも関係があるのではないだろうか.

#### 5 結言

HVS は NBW よりも速く LMN に近づき, かつ HVS と NBW をとる BB が存在する. 従って, HVS は NBW に比べ, 高レイノルズ数における乱流遷移において, 有効な指標と考えることができる. 今回の研究によれば, これらのことが平板間クエット流においては成立するようのだが, そこからの類推で, 他より一般の剪断性流れにおいても, HVS のようにスパン方向に鏡像対称性を有した状態は, NBW のような対称性のより低い状態に比べて, 相空間中で層流状態に近い位置にあり, かつ, HVS をとる多様体が BB を形作っていると考えるのは, 自然ではなかろうか. これを模式的に表したものが Fig.2 である. 高レイノルズ数の剪断流の実験において, 初期の乱れが十分に低減された状態から乱流遷移が起きる場合, スパン方向に対称性の高い状態, つまり, ヘアピン状の渦が確認される<sup>11</sup>) ことがある. 以上に挙げた HVS の性質は, この経験的事実を説明する糸口となろう. 本研究では科学研究費 (23760164) より助成を受けた. ここに謝意を表す.

#### 引用文献

- 1) Nagata, M., "Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity" J. Fluids Mech., 217(1989), 519-527 .

- 2) Clever, R. M. and Busse, F. H., “Tertiary and quaternary solutions for plane Couette flow”, *J. Fluids Mech.*, 344 (1997), 137–153 .
- 3) Waleffe, F., “Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows”, *Phys. Fluids*, 15(2003), 1517–1534.
- 4) Van Veen, L., and Kawahara, G., “Homoclinic tangle on the edge of shear turbulence”, *Phys. Rev. Lett.*, vol.107(2011), 114501.
- 5) Itano, T., Akinaga, T., Generalis, S.C. and Sugihara-Seki, M., “Transition of Planar Couette Flow at Infinite Reynolds Numbers”, *Phys. Rev. Lett.* vol. 111(2013), 184502.
- 6) Wang, J., Gibson, J., and Waleffe F., “Lower branch coherent states in shear flows : transition and control”, *Phys. Rev. Lett.*, 98(2007), 204501–204504 .
- 7) Hall, P. and Sherwin, S., “Streamwise vortices in shear flows: harbingers of transition and the skeleton of coherent structures”, *J. Fluid Mech.* 661(2010), 178-205 .
- 8) Deguchi, K., Hall, P., and Walton, A., “The emergence of localized vortex wave interaction states in plane Couette flow”, *J. Fluid Mech.* 721(2013), 58-85 .
- 9) Drazin, P.G. and Reid, W.H., “Hydrodynamic Stability”, Cambridge Univ. Press. pp. 212-216
- 10) Skorokhodov, S.L., “Numerical Analysis of the Spectrum of the Orr-Sommerfeld Problem”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 47(2007) 1603-1621 .
- 11) Schlatter, P., Orlu, R., Li, Q., Brethouwer G., Alfredsson, H., Johansson, A. and Henningson, D., “Progress in Simulations of Turbulent Boundary Layers”, *Proc. 7th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, (2011)